Акимов И.Ю. Пятый постулат Евклида

Начнём с небольшого вступления. В 5-й постулат, в современном понимании, кроме него самого, вкладывают ещё один более глубокий постулат – о структуре пространства, применяемого в данной геометрии, и алгоритме его построения. Но эти постулаты следует разделять. В геометрии Евклида он участвует с самого первого предложения. Все построения и рассуждения проходят в Евклидовом пространстве. То, что он не озвучен, и тем самым как бы скрыт, тоже понятно. До появления первой неевклидовой геометрии никто и представить не мог, что структуру пространства можно представлять другой. Можно назвать его нулевым постулатом. В каждой геометрии он свой и является ключевым для неё. Нулевой постулат действительно доказать невозможно. Какой мы выберем нулевой постулат – такую геометрию мы и получим. В 5-й постулат стали вкладывать смысл нулевого постулата, скорее всего потому, что именно в попытке его доказательства методом апагогии Лобачевский построил первую неевклидову геометрию. В геометрии Римана 5-го постулата нет, а нулевой постулат о структуре пространства есть. И в геометрии Евклида и в геометрии Лобачевского ключевым является именно нулевой постулат о структуре пространства, а 5-й постулат лишь следствие его. И поэтому в 5-й постулат нужно вкладывать лишь тот смысл – который содержится в его формулировке. И Евклид, и все те, кто пытался доказать 5-й постулат до Лобачевского, и сам Лобачевский до построения своей геометрии, понимали его именно так. Итак, по нулевому постулату принимаем, что пространство Евклидово. И в этом пространстве и происходят все последующие рассуждения.

Пятый постулат – явно более позднее добавление в список постулатов. Так-так его необходимость не очевидна с первого взгляда.

Постулаты Евклида.
Допустим:
1.Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.

2.И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.

3.И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.

4.(Акс. 10.) И что все прямые углы равны между собой.

5.(Акс. 11.) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

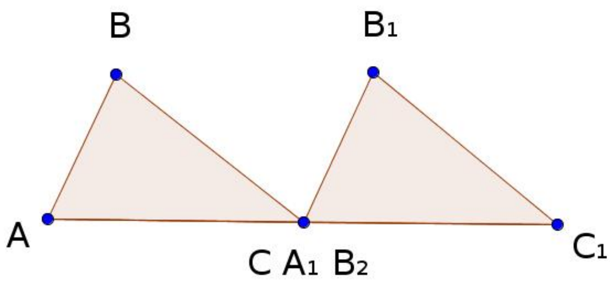
(В статье используются «Начала Евклида» ОГИЗ 1948г. Перевод с греческого и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского. В приложении 1 даны определения, аксиомы, постулаты и формулировки первых 29 предложений из данного издания.)

Так возможно ли доказать 5-й постулат? Сам постулат не удобен для доказательства. Но исследования в этом направлении выявили ряд утверждений, эквивалентных пятому постулату. То есть, если принять эти утверждения, то можно доказать 5-й постулат. Но и эти утверждения можно доказать, только приняв 5-й постулат.

На мой взгляд, самым удобным для доказательства эквивалентом 5-го постулата является утверждение: внутренние углы треугольника вместе равны двум прямым.

В книге Евклида это утверждение включено в предложение 32. То есть после того, как применён 5-й постулат в предложении 29. Чтобы подчеркнуть, что мы не собираемся применять 5 постулат, и так как разрешим использовать предложения с 1-го по 26-е , назовём это утверждение предложением 26А.

Итак:
Предложение 26А. Внутренние углы треугольника вместе равны двум прямым.



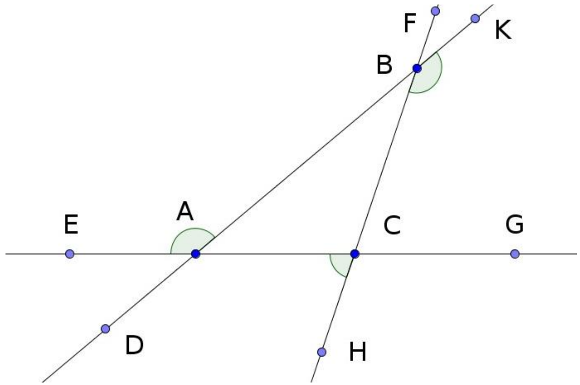
Можно доказать это предложение методом построения. Первые 26 предложений Евклида это позволяют. Берём произвольный треугольник ABC. Продолжаем любую его сторону по прямой. Строим равный треугольник $A_1B_1C_1$, чтобы к примеру, точка С одного треугольника совпала с точкой A_1 другого. А сторона A_1C_1 лежала на одной прямой со стороной AC. Вершины B и B_1 должны лежать по одну сторону от прямой AC_1. Строим третий треугольник $A_2B_2C_2$ равный треугольнику ABC. Его точка B_2 должна совпадать с точками С и A_1, а сторона A_1B_1 лежать на одной прямой со стороной B_2A_2. После построения определяем, что сторона B_2C_2 лежит на одной прямой со стороной CB. В точке CA_1B_2 у нас получаются три угла, равные углам ACB, BAC и ABC. Далее доказываем, что эти углы вместе равны двум прямым.

Подробно такое доказательство рассматривать не будем. Так как речь идёт об идеальных фигурах в идеальном мире (Платоновском) (пространстве создаваемом алгоритмом нашего топокодера). А ни какие построения этому миру не соответствуют и поэтому метод построения мало доказателен. Если мы строим треугольник равный данному, то действительно ли он равен ему, ведь речь идёт об идеальных фигурах и их свойствах, а в чертежах всегда отступление от идеалов. И если сторона одного треугольника при построении лежит на одной прямой со стороной другого равного треугольника, то лежат ли они на одной прямой у идеальных фигур? Необходимо найти другое доказательство, где графические построения несут вспомогательную роль, а мы рассуждаем об идеальных фигурах.

Здесь и далее в статье будем указывать определения, аксиомы, постулаты и предложения, на которые будем опираться в доказательствах. Это делается не из любви к аксиоматическому методу. А для того, чтобы случайно не использовать то, что мы и пытаемся доказать.

Предложение 26А. Внутренние углы треугольника вместе равны двум прямым.

Доказательство.



Возьмём произвольный треугольник ABC. Стороны треугольника непрерывно продолжим по прямой (Постулат 2).

В точке А образуются четыре угла, а именно: EAB, BAC, CAD и DAE. Углы EAB и BAC вместе равны двум прямым

(Предложение 13). Углы CAD и DAE вместе равны двум прямым (Предложение 13). Следовательно, четыре угла, образованные в точке A, вместе равны четырём прямым. Аналогично доказывается, что в точках B и C четыре угла, образованные в этих точках, вместе равны четырём прямым углам. Значит 12 углов, образованные в точках A, B и C вместе равны 12 прямым углам.

Повернём прямую AC относительно точки A (точка A остаётся на месте) по часовой стрелке, до совпадения с прямой AB. При этом прямая повернулась на угол EAB. Теперь повернём нашу прямую по часовой стрелке относительно точки B до совпадения с прямой BC. Угол поворота – KBC. Поворачиваем нашу прямую по часовой стрелке, относительно точки C, до первоначального положения AC. Угол поворота при этом – HCA. Прямая AC за три поворота совершила полный оборот по кругу. (При этом все точки на этой прямой сместились на расстояние суммы сторон треугольника, но это не имеет значения, так как в нашем треугольнике все углы и расстояния между точками сохранены). Так как прямая AC совершила полный оборот, то углы EAB, KBC и HCA вместе равны четырём прямым (Предложение 13). Так как углы через вершину равны между собой (Предложение 15), то углы DAC, ABF и BCG вместе равны четырём прямым.

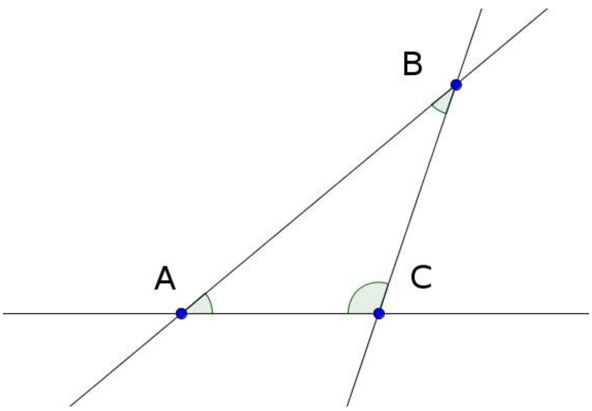
У нас остались внутренние углы треугольника ABC, а именно BAC, ABC и BCA, а также равные им через вершину углы, а именно EAD, FBK и GCH. На их общую сумму остаётся 12-8=4 прямых угла. Следовательно углы BAC, ABC и BCA вместе равны двум прямым. И равные им углы EAD, FBK и GCH вместе равны двум прямым.

Мы взяли произвольный треугольник, но данное доказательство применимо к любому треугольнику. Значит, внутренние углы любого треугольника вместе равны двум прямым.

Было ли допустимо во времена Евклида такое доказательство? Ведь в те времена избегали использовать движение в доказательстве предложений. Я думаю, что допустимо. Так как движение используется только для того, чтобы определить углы между прямыми, которые дают полный оборот прямой. Этот способ ничуть не хуже метода наложения, используемого в книге Евклида.

Можно привести более короткое доказательство, используя этот метод. Я назвал его методом поворота прямой.

Доказательство 2 предложения 26A.



Возьмём произвольный треугольник ABC. Стороны треугольника непрерывно продолжим по прямой (Постулат 2).

Повернём прямую AC против часовой стрелки, относительно точки A (точка A остаётся на месте) до совпадения с прямой AB. При этом прямая повернулась на угол CAB. Повернём нашу прямую против часовой стрелки относительно точки B до совпадения с прямой BC. Угол поворота – ABC. Поворачиваем нашу прямую против часовой стрелки относительно точки C до положения AC. Угол поворота – BCA. Наша прямая совершила половину оборота. (Если взять равносторонний треугольник, то точка A на прямой будет соответствовать точке C треугольника, а точка C прямой соответствовать точке A треугольника, то есть поменяются местами).

Так как прямая совершила половину оборота, то углы CAB, ABC и BCA вместе равны двум прямым.

Данное доказательство применимо к любому произвольному треугольнику, а значит внутренние углы любого треугольника вместе равны двум прямым.

Доказательство 2 предложения 26А более короткое, но оно не даёт нам расклад по всем углам образованным в точках A, B и C.

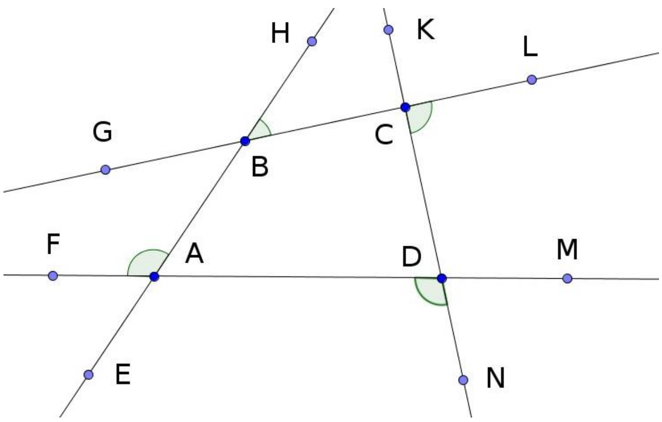
Можно продолжить рассуждения и рассмотреть методом поворота прямой выпуклый четырёхугольник.

Предложение 26Б. Внутренние углы выпуклого четырёхугольника вместе равны четырём прямым.

Доказательство.

Возьмём произвольный выпуклый четырёхугольник ABCD. Стороны четырёхугольника непрерывно продолжим по прямой (Постулат 2).

В точке пересечения прямых образуется четыре угла, равных вместе 4 прямым (Предложение 13). Следовательно, в точках A, B, C и D образуется по 4 угла, вместе равные четырём прямым. Значит в нашем четырёхугольнике образуется 16 углов, вместе равных 16 прямым.



Повернём прямую AD по часовой стрелке, относительно точки A (точка A остаётся на месте), до совпадения с прямой AB. Угол поворота – FAB. Теперь повернём нашу прямую по часовой стрелке относительно точки B до совпадения с прямой BC. Угол поворота HBC. Поворачиваем нашу прямую по часовой стрелке относительно точки C до до совпадения с прямой CD. Угол поворота – LCD. Поворачиваем прямую по часовой стрелке относительно точки D до первоначального положения AD. Угол поворота NDA.

За четыре поворота прямая AD совершила полный оборот и вернулась на место. Значит углы FAB, HBC, LCD и NDA вместе равны четырём прямым (Предложение 13). Равные им через вершину (Предложение 15) углы EAD, GBA, BCK и CDM вместе равны четырём прямым. Углы поворота прямой и равные им через вершину, вместе равны 8 прямым.

У нас остались внутренние углы четырёхугольника ABCD, а именно – DAB, ABC, BCD и CDA, и равные им через вершину углы EAF, GBH, KCL и MDN. На их общую сумму остаётся 16-8=8 прямых. Значит внутренние углы выпуклого четырёхугольника ABCD, а именно – DAB, ABC, BCD и CDA вместе равны 4 прямым. Равные им через вершину углы EAF, GBH, KCL и MDN вместе равны 4 прямым.

Мы взяли произвольный выпуклый четырёхугольник, но данное доказательство применимо к любому выпуклому четырёхугольнику. Значит внутренние углы любого выпуклого четырёхугольника вместе равны четырём прямым.

Следствие. Так как внутренние углы любого выпуклого четырёхугольника вместе равны четырём прямым, то существует четырёхугольник, у которого все углы прямые.

Следствие предложения 26Б является ещё одним эквивалентом 5-го постулата Евклида.

Для предложения 26Б, как и для предложения 26А возможно более короткое доказательство. Но оно даёт информацию только о внутренних углах фигуры. Если продолжить рассуждения, то можно доказать то же, что и в приведённом выше доказательстве, но тогда исчезнет краткость.

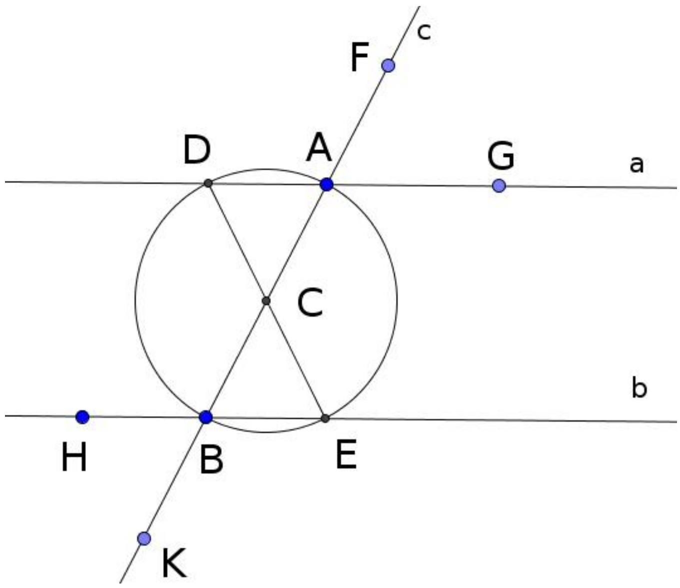
Можно продолжить исследование выпуклых фигур и узнать, что сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна 6 прямым, а выпуклого шестиугольника 8 прямым. Можно вывести общую формулу выпуклых фигур. Ничего нового в этом нет. Это всё давно доказано. Но традиционно, сначала доказывается сумма внутренних углов треугольника, и через это предложение доказывается всё остальное. При применении метода поворота прямой, можно исследовать суммы углов многоугольников в любой последовательности. Можно исследовать не только выпуклые многоугольники, но и любые фигуры, состоящие из прямых линий. Простота и наглядность – большой плюс этого метода. Так как прямая всегда возвращается на своё место, то она делает либо целое количество оборотов, либо с половиной. Сумма углов всегда будет кратна 4 прямым углам (целое количество оборотов), или 2 прямым (когда один поворот не полный).

Мы всё время говорили о доказательстве 5-го постулата, или его эквивалента. Но вспомним, для чего он был введён. А введён он был для доказательства предложения 29. И если доказать предложение 29 без применения 5-го постулата, то его необходимость совсем отпадает. Далее его, при желании, можно доказать в качестве предложения.

Итак, ставится новая задача: доказать предложение 29 без применения 5-го постулата. Разрешено использовать предложения с 1-го по 26-е включительно. Приведённое доказательство предложения 29 в книге Евклида назовём доказательством 1.

Предложение 29. Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым.

Доказательство 2.



Даны параллельные прямые a и b, и пересекающая их прямая c. Обозначим точку пересечения прямых a и c точкой A, а прямых b и c точкой B. Разделим отрезок AB пополам (Предложение 10). Точка C делит отрезок AB пополам. Из точки C раствором AC или CB описываем круг (Постулат 3). Необозначенные точки пересечения круга с прямыми a и b обозначим как D и E. Проводим прямую линию от точки D до точки E (Постулат 1).

Так как углы DCA и BCE равны через вершину (Предложение 15), а стороны AC, DC, BC и EC равны как раствор описанной из точки C окружности (Определение 15), то треугольники DCA и BCE равны между собой (Предложение 4).

Треугольники DCA и BCE равнобедренные, так как стороны AC, DC, BC и EC равны (Определение 20). У равнобедренных треугольников углы у основания равны (Предложение 5). Следовательно, углы CDA, CAD, CBE и CEB равны. Угол DAC равен углу FAG через вершину (Предложение 15). Угол CBE равен углу HBK через вершину. Следовательно, углы FAG, DAC, CBE и HBK равны.

Так как углы FAG, DAC, CBE и HBK равны, то и дополняющие их до двух прямых углов углы (соответственно) FAD, GAC, CBH и KBE равны между собой (Предложение 13).

Так как углы DAC и CAG вместе равны двум прямым (Предложение 13), углы CBE и CBH равны двум прямым (Предложение 13), а углы DAC и CBE равны между собой и углы CAG и CBH равны между собой, то углы CAG и CBE вместе равны двум прямым, а углы DAC и CBH вместе равны двум прямым.
Следствие. Если, соединяя прямой линией точку D и точку E, прямая DE не пересекла прямую c в точке C, то прямые a и b не параллельны.

Если прямая DE не проходит через точку C, то вышеприведенное доказательство не получится. Но у нас по условию предложения 29 прямые a и b параллельны, и доказательство в силе.

09.16г – 25.02.17г.

Приложение 1

Определения

1.Точка есть то, что не имеет частей.

2.Линия же - длина без ширины.

3.Концы же линии — точки.

4.Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

5.Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6.Концы же поверхности — линии.

7.Плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

8.Плоский же угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не расположенных по <одной> прямой.

9.Когда же линии, содержащие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.

10.Когда же прямая, восстановленная на <другой> прямой, образует рядом углы, равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восставлена.

11.Тупой угол - больший прямого.

12.Острый же - меньший прямого.

13.Граница есть то, что является оконечностью чего-либо.

14.Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.

15.Круг есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии [которая называется окружностью], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие [на окружность круга] прямые равны между собой.

16.Центром же круга называется эта точка.

17.Диаметр же круга есть какая угодно прямая, проведённая через центр и ограничиваемая с обеих сторон окружностью круга, она же и рассекает круг пополам.

18.Полукруг же есть фигура, содержащаяся между диаметром и отсекаемой им <частью> окружности. Центр же полукруга — то же самое, что и у круга.

19.Прямолинейные фигуры суть те, которые содержатся между прямыми, трёхсторонние – между тремя, четырёхсторонние же – четырьмя, многосторонние же – которые содержатся между более чем четырьмя прямыми.

20.Из трёхсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же - имеющая только две равные стороны, разносторонний же — имеющая три неравные стороны.

21.Кроме того, из трёхсторонних фигур прямоугольный треугольник есть имеющий прямой угол, тупоугольный же – имеющий тупой угол, а остроугольный – имеющий три острых угла.

22.Из четырёхсторонних фигур квадрат есть та, которая и равносторонняя и прямоугольная, разносторонник же - прямоугольная, но не равносторонняя, ромб - равносторонняя, но не прямоугольная, ромбоид (параллелограмм) — имеющая противоположные стороны и углы, равные между собой, но не являющаяся ни равносторонней ни прямоугольной.

Остальные же четырёхсторонники будем называть трапециями.

23. Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой <стороны> между собой не встречаются.

Постулаты

Допустим:

1.Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.

2.И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.

3.И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.

4.(Акс. 10.) И что все прямые углы равны между собой.

5.(Акс. 11.) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

Общие понятия (Аксиомы)

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.
5. И удвоенные одного и того же равны между собой.
6. И половины одного и того же равны между собой.
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. И целое больше части.
9. И две прямые не содержат пространства.

Предложения 1-29

1. На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.

2. От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.

3. Из двух заданных неравных прямых от большей отнять прямую, равную меньшей.

4. Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждая каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.

5. У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.

6. Если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы.

7. На одной и той же прямой нельзя построить двух прямых, равных каждая каждой двум другим прямым и <сходящихся> одни в одной точке, другие в другой, так, чтобы эти прямые находились бы по одну сторону и имели бы одни и те же концы с первоначальными прямыми.

8. Если два треугольника имеют две стороны, равные каждая каждой двум сторонам, имеют также и основание, равное основанию, то они будут иметь и угол равный углу, заключённому между равными прямыми.

9. Данный прямолинейный угол рассечь пополам.

10. Данную ограниченную прямую рассечь пополам.

11. К данной прямой из заданной на ней точки провести прямую под прямыми углами.

12.К данной неограниченной прямой из заданной точки, на ней не находящейся, провести перпендикулярную прямую линию.

13. Если прямая, восставленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых или <вместе> равные двум прямым.

14. Если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой.

15. Если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину, равные между собой.

16.Во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол больше каждого из внутренних, <ему> противолежащих.

17. Во всяком треугольнике два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых.

18. Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол.

19. Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной.

20. Во всяком треугольнике две стороны, взятие вместе при всяком их выборе, больше оставшейся.

21. Если в треугольнике на одной из сторон от концов восставлены будут внутрь две прямые, то восставленные прямые (вместе) будут меньше двух остальных сторон треугольника, но будут заключать больший угол.

22. Из трёх прямых, которые равны трём данным [прямым], составить треугольник; нужно, однако, чтобы две <прямые, взятые, вместе>, при всяком их выборе были бы больше оставшейся

[вследствие того, что во всяком треугольнике две стороны, <взятые вместе> при всяком их выборе, больше оставшейся].

23. На данной прямой при данной её точке построить прямолинейный угол, равный данному прямолинейному углу.

24. Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, но заключённый между равными сторонами угол <в одном> больше, <чем в другом>, то и основание <в первом> будет больше основания <во втором>.

25. Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, основание же <в одном> больше, чем основание <в другом>, то и угол, заключённый между равными прямыми <в первом>, больше угла <во втором>.

26. Если два треугольника имеют два угла, равных двум углам каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, либо заключающейся между равными углами, либо стягивающей один из равных углов, то они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам [каждая каждой] и оставшийся угол оставшемуся углу.

27. Если прямая, падающая на две прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны друг другу.

28. Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние <углы вместе>, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой.

29. Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым.